**Semana 19**

- Se sugiere antes de resolver los ejercicios ver los videos de YouTube de los temas correspondientes así como también leer la bibliografía recomendada y el material teórico subido en el campus del curso.
- A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos y algunas observaciones para resolver los ejercicios 8 a 13 de la Guía 6. Los ejercicios propuestos que no están en la guía (pero que se relacionan con los mismos) no tienen numeración.

# Optimización de formas cuadráticas

El siguiente ejercicio nos va a permitir entender la demostración del Teorema de Rayleigh que veremos luego.

**Ejercicio 8:** Sea $Q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por

$$Q(x) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_4^2.$$

a) Hallar los valores máximos y mínimos de los *cocientes de Rayleigh*

$$\frac{Q(x)}{\|x\|^2}, \quad x \neq 0.$$

b) Hallar el conjunto de todos los $x_M \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tales que

$$\frac{Q(x_M)}{\|x_M\|^2} = \max_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2}.$$

c) Hallar el conjunto de todos los $x_m \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tales que

$$\frac{Q(x_m)}{\|x_m\|^2} = \min_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2}.$$

d) Hallar el conjunto de todos los $\hat{x}_M \in S_3$ tales que

$$Q(\hat{x}_M) = \max_{x \in S_3} Q(x) = \max_{\|x\|=1} Q(x).$$

e) Hallar el conjunto de todos los $\hat{x}_m \in S_3$ tales que

$$Q(\hat{x}_m) = \min_{x \in S_3} Q(x) = \min_{\|x\|=1} Q(x).$$

Como $Q$ no tiene productos cruzados nos va a resultar sencillo resolver el ejercicio. Luego veremos cómo vamos a proceder en el caso en que $Q$ tenga productos cruzados.

*Dem.* $a)$ : Observar que, como $-3x_2^2 \leq 5x_2^2$ y $2x_3^2 \leq 5x_3^2$, tenemos que, para todo $x \in \mathbb{R}^4$,

$$Q(x) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_4^2 \leq 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 = 5\|x\|^2.$$

Por otro lado, como $-3x_1^2 \leq 5x_1^2$, $-3x_3^2 \leq 2x_3^2$ y $-3x_4^2 \leq 5x_4^2$, tenemos que, para todo $x \in \mathbb{R}^4$,

$$-3\|x\|^2 = -3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 3x_4^2 \leq Q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_4^2.$$

Por lo tanto,

$$-3\|x\|^2 \leq Q(x) \leq 5\|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^4.$$

Con lo cual, si $x \neq 0$, tenemos que

$$-3 \leq \frac{Q(x)}{\|x\|^2} \leq 5 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}.$$

Veamos entonces, que el máximo del cociente de Rayleigh es 5 y el mínimo del cociente de Rayleigh es $-3$. Como ya vimos que 5 es una cota superior y $-3$ es una cota inferior del cociente de Rayleigh, sólo nos resta encontrar algún $x_M \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tal que $\frac{Q(x_M)}{\|x_M\|^2} = 5$ y algún $x_m \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tal que $\frac{Q(x_m)}{\|x_m\|^2} = -3$.

Observar que $x_M := [1\ 0\ 0\ 0]^T \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, $Q(x_M) = 5$ y $\|x_M\| = 1$. Entonces $\frac{Q(x_M)}{\|x_M\|^2} = 5$ y concluimos que

$$\max_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = 5.$$

Por otra parte, $x_m := [0\ 1\ 0\ 0]^T \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, $Q(x_m) = -3$ y $\|x_m\| = 1$. Entonces $\frac{Q(x_m)}{\|x_m\|^2} = -3$ y concluimos que

$$\min_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = -3.$$

$b)$ : Queremos hallar el conjunto de todos los $x_M \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tales que $\frac{Q(x_M)}{\|x_M\|^2} = \max_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = 5$. Planteamos para qué valores de $x \in \mathbb{R}^4$ tenemos que $Q(x) = 5\|x\|^2$ y eso vale, si y sólo si,

$$Q(x) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_4^2 = 5\|x\|^2 = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2.$$

Entonces,

$$8x_2^2 + 3x_3^2 = 0.$$

Por lo tanto, $x_2 = x_3 = 0$. Entonces,

$$Q(x) = 5\|x\|^2 \text{ si y sólo si } x = [x_1\ 0\ 0\ x_4] \text{ con } x_1, x_4 \in \mathbb{R}$$

ó, equivalentemente, $Q(x) = 5\|x\|^2$ si y sólo si $x \in gen\{[1\ 0\ 0\ 0]^T, [0\ 0\ 0\ 1]^T\}$.

Por lo tanto, si $x_M \in gen\{[1\ 0\ 0\ 0]^T, [0\ 0\ 0\ 1]^T\} \setminus \{0\}$ tenemos que

$$\frac{Q(x_M)}{\|x_M\|^2} = \max_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = 5.$$

$c)$ : Para hallar el conjunto de todos los $x_m \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tales que $\frac{Q(x_m)}{\|x_m\|^2} = \min\limits_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = -3$. Planteamos para qué valores de $x \in \mathbb{R}^4$ tenemos que $Q(x) = -3\|x\|^2$ y eso vale, si y sólo si,

$$Q(x) = 5x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 5x_4^2 = -3\|x\|^2 = -3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 - 3x_4^2.$$

Entonces,

$$8x_1^2 + 5x_3^2 + 8x_4^2 = 0.$$

Por lo tanto, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Entonces,

$$Q(x) = -3\|x\|^2 \text{ si y sólo si } x = [0\ x_2\ 0\ 0] \text{ con } x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{ó, equivalentemente } Q(x) = -3\|x\|^2 \text{ si y sólo si } x \in gen\{[0\ 1\ 0\ 0]^T\}.$$

Por lo tanto, si $x_m \in gen\{[0\ 1\ 0\ 0]^T\} \setminus \{0\}$ tenemos que

$$\frac{Q(x_m)}{\|x_m\|^2} = \min_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = -3.$$

$d)$ : En el item $b)$, vimos que $Q(x) = 5\|x\|^2$ si y sólo si $x \in gen\{[1\ 0\ 0\ 0]^T, [0\ 0\ 0\ 1]^T\}$. Si ahora imponemos la restricción $x \in S_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1\}$, tenemos que

$$\max_{x \in S_3} Q(x) = \max_{\|x\|=1} Q(x) = 5$$

y los $\hat{x}_M \in S_3$ tales que

$$Q(\hat{x}_M) = \max_{x \in S_3} Q(x) = \max_{\|x\|=1} Q(x) = 5$$

son los $x \in gen\{[1\ 0\ 0\ 0]^T, [0\ 0\ 0\ 1]^T\}$ tales que $\|x\| = 1$. Entonces, el máximo se alcanza en los vectores $\hat{x}_M = \alpha[1\ 0\ 0\ 0]^T + \beta[0\ 0\ 0\ 1]^T$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que (aplicando Pitágoras o haciendo la cuenta)

$$1 = \|x\|^2 = \|\alpha[1\ 0\ 0\ 0]^T + \beta[0\ 0\ 0\ 1]^T\|^2 = \alpha^2\|[1\ 0\ 0\ 0]^T\|^2 + \beta^2\|[0\ 0\ 0\ 1]^T\|^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Entonces, el máximo se alcanza en los vectores $\hat{x}_M = \alpha[1\ 0\ 0\ 0]^T + \beta[0\ 0\ 0\ 1]^T$ tales que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

$e)$ : En el item $c)$, vimos que $Q(x) = -3\|x\|^2$ si y sólo si $x \in gen\{[0\ 1\ 0\ 0]^T\}$. Si ahora imponemos la restricción $x \in S_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1\}$, tenemos que

$$\min_{x \in S_3} Q(x) = \min_{\|x\|=1} Q(x) = -3$$

y los $\hat{x}_m \in S_3$ tales que

$$Q(\hat{x}_m) = \min_{x \in S_3} Q(x) = \min_{\|x\|=1} Q(x) = -3$$

son los $x \in gen\{[0\ 1\ 0\ 0]^T\}$ tales que $\|x\| = 1$. Entonces, el mínimo se alcanza en los vectores $\hat{x}_m = \alpha[0\ 1\ 0\ 0]^T$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $1 = \|x\| = \|\alpha[0\ 1\ 0\ 0]^T\| = |\alpha|\|[0\ 1\ 0\ 0]^T\| = |\alpha|$. Entonces, $\alpha = \pm 1$ y, el mínimo se alcanza en los vectores $\hat{x}_m = \pm[0\ 1\ 0\ 0]^T$. $\square$

**Teorema 1** (Teorema de Rayleigh). *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y $Q(x) = x^T Ax$. Sean $\lambda_M$ y $\lambda_m$ los autovalores máximo y mínimo de $A$ respectivamente y sean $\mathcal{S}_{\lambda_M}$ y $\mathcal{S}_{\lambda_m}$ los autespacios asociados respectivos. Entonces:*

$$\lambda_m\|x\|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_M\|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n. \text{ Además,}$$

$$Q(x) = \lambda_m\|x\|^2 \text{ si y sólo si } x \in \mathcal{S}_{\lambda_m} \text{ y } Q(x) = \lambda_M\|x\|^2 \text{ si y sólo si } x \in \mathcal{S}_{\lambda_M}.$$

Lo vamos a demostrar de manera sencilla usando las ideas del **Ejercicio 8**.

*Dem.* Sea $A = P\Lambda P^T$ una descomposición ortogonal de $A$, que existe pues $A$ es simétrica. Supongamos que

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_M & \cdots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

Donde $\lambda_M = \lambda_1 = \cdots = \lambda_r > \lambda_{r+1} \geq \cdots > \lambda_{n-k+1} = \cdots = \lambda_n = \lambda_m$. Es decir, ordenamos los autovalores de $A$ de mayor a menor y suponemos que la multiplicidad algebraica (y geométrica) de $\lambda_M$ es $r$ y la multiplicidad algebraica (y geométrica) de $\lambda_m$ es $k$.

Entonces, si $P = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n]$, tendremos que

$$\mathcal{S}_{\lambda_M} = gen\{v_1, \cdots, v_r\} \text{ y } \mathcal{S}_{\lambda_m} = gen\{v_{n-k+1}, \cdots, v_n\}.$$

Si hacemos el cambio de variables $x = Py$, por un lado, como $P$ es ortogonal, vale que

$$\|x\| = \|Py\| = \|y\|$$

y, por el otro lado,

$$\begin{aligned} Q(x) &= (Py)^T A(Py) = y^T\Lambda y := \tilde{Q}(y) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \\ &= \lambda_M y_1^2 + \cdots + \lambda_m y_m^2 = \lambda_M y_1^2 + \cdots + \lambda_M y_r^2 + \cdots + \lambda_m y_{n-k+1}^2 + \cdots + \lambda_m y_n^2. \end{aligned}$$

Entonces, usando ideas similares a las del **Ejercicio 8**, tenemos que, para todo $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_m\|y\|^2 \leq \tilde{Q}(y) \leq \lambda_M\|y\|^2.$$

Usado que $\|x\| = \|y\|$, nos queda que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda_m\|x\|^2 = \lambda_m\|y\|^2 \leq \tilde{Q}(y) = Q(x) \leq \lambda_M\|y\|^2 = \lambda_M\|x\|^2.$$

Entonces, probamos que

$$\lambda_m\|x\|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_M\|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Por otra parte, también usando ideas similares a las del **Ejercicio 8**, tenemos que

$$Q(x) = \tilde{Q}(y) = \lambda_M\|y\|^2 = \lambda_M\|x\|^2,$$

si y sólo si $y \in gen\{e_1, \cdots, e_r\}$ donde $e_i$ es el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces, como $x = Py = [v_1 \; \cdots \; v_r \; \cdots \; v_{n-k+1} \; \cdots \; v_n]y$, nos queda que

$$Q(x) = \lambda_M \|x\|^2 \text{ si y sólo si } x \in gen\{v_1, \cdots, v_r\} = \mathcal{S}_{\lambda_M}.$$

De la misma manera, tenemos que

$$Q(x) = \tilde{Q}(y) = \lambda_m \|y\|^2 = \lambda_m \|x\|^2,$$

si y sólo si $y \in gen\{e_{n-k+1}, \cdots, e_n\}$. Entonces, como $x = Py[v_1 \; \cdots \; v_r \; \cdots \; v_{n-k+1} \; \cdots \; v_n]y$, nos queda que

$$Q(x) = \lambda_m \|x\|^2 \text{ si y sólo si } x \in gen\{v_{n-k+1}, \cdots, v_n\} = \mathcal{S}_{\lambda_m}.$$

□

A partir del Teorema de Rayleigh que acabamos de probar, es inmediato ver que:

Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica y $Q(x) = x^T Ax$. Si $\lambda_M$ y $\lambda_m$ son los autovalores máximo y mínimo de $A$ respectivamente y $\mathcal{S}_{\lambda_M}$ y $\mathcal{S}_{\lambda_m}$ los autespacios asociados respectivos. Entonces:

$$\max_{x\neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = \lambda_M \text{ y el máximo se alcanza en los } x \in \mathcal{S}_{\lambda_M} \setminus \{0\}.$$

$$\min_{x\neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = \lambda_m \text{ y el máximo se alcanza en los } x \in \mathcal{S}_{\lambda_m} \setminus \{0\}.$$

En particular, $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_M$ y el máximo se alcanza en los $x \in \mathcal{S}_{\lambda_M}$ tales que $\|x\| = 1$ y $\min\limits_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_m$ y el mínimo se alcanza en los $x \in \mathcal{S}_{\lambda_m}$ tales que $\|x\| = 1$.

**Ejercicio 10:** Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por

$$Q(x) = 8x_1^2 + 8x_2^2 + 11x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

a) Hallar $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x)$ y $\min\limits_{\|x\|=1} Q(x)$.

b) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que maximizan los cocientes de Rayleigh.

c) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que minimizan los cocientes de Rayleigh.

d) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in S_2$ que maximizan $Q$.

e) Hallar y graficar el conjunto de todos los $x \in S_2$ que minimizan $Q$.

Observar que $Q(x) = x^T Ax$, con $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 11 \end{bmatrix}$ simétrica. El polinomio característico de $A$ es $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 234\lambda + 648$ y sus raíces son $\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 9$ y $\lambda_3 = 6$. Por otra parte,

$$\mathcal{S}_{\lambda_1=12} = nul(A - 12I) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = gen\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\}.$$

$$\mathcal{S}_{\lambda_2=9} = nul(A-9I) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = gen\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \}.$$

$$\mathcal{S}_{\lambda_2=6} = nul(A-6I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} = gen\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}.$$

Entonces, $\{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ es una bon de $\mathbb{R}^3$. Tomamos

$$P := \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$$

entonces $\det(P) = 1$ y una diagonalización ortogonal de $A$ es

$$A = P \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} P^T.$$

*Dem.* $a)$ : Usando la diagonalización ortogonal de $A$ y el Teorema de Rayleigh, tenemos que

$$\max_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_M = 12 \text{ y } \min_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_m = 6.$$

$b)$ : Usando la diagonalización ortogonal de $A$ y el Teorema de Rayleigh, tenemos que los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que maximizan los cocientes de Rayleigh son los

$$x \in \mathcal{S}_{\lambda_M=12} \setminus \{0\} = gen\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \} \setminus \{0\}.$$

$c)$ : Usando la diagonalización ortogonal de $A$ y el Teorema de Rayleigh, tenemos que los $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ que minimizan los cocientes de Rayleigh son los

$$x \in \mathcal{S}_{\lambda_m=6} \setminus \{0\} = gen\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \} \setminus \{0\}.$$

$d)$ : Por el item $b)$, $x$ maximiza el cociente de Rayleigh si y sólo si $x \in \mathcal{S}_{\lambda_M=12} \setminus \{0\} = gen\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \} \setminus \{0\}$. En este item, buscamos de entre esos $x$ aquellos que pertenecen a $S_2$. Entonces, el conjunto de todos los $x \in S_2$ que maximizan $Q$ son los $x$ de la forma $x = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ con

$\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$1 = \|x\| = \|\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\| = |\alpha| \ \|\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\| = |\alpha|\sqrt{6}.$$

Entonces $\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ y los $x \in S_2$ que maximizan $Q$ son $\hat{x}_M = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

*e)* : Por el item *c)*, $x$ minimiza el cociente de Rayleigh si y sólo si $x \in \mathcal{S}_{\lambda_m=6} \setminus \{0\} = gen\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\} \setminus \{0\}$. En este item, buscamos de entre esos $x$ aquellos que pertenecen a $S_2$. Entonces, el conjunto de todos los $x \in S_2$ que minimizan $Q$ son los $x$ de la forma $x = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$1 = \|x\| = \|\alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\| = |\alpha| \ \|\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\| = |\alpha|\sqrt{2}.$$

Entonces $\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ y los $x \in S_2$ que minimizan $Q$ son $\hat{x}_m = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. $\square$

**Ejercicio de examen:** Decidir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: sean

$$Q(x) = x^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \text{ y } R(x) = x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x.$$

Entonces

$$\max_{\|x\|=1} Q(x) = \max_{\|x\|=1} R(x).$$

*Dem.* La afirmación es FALSA.

Por el Teorema de Rayleigh, claramente

$$\max_{\|x\|=1} R(x) = 2,$$

esto es debido a que el máximo autovalor de la matriz simétrica (en particular diagonal) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es 2.

Por otra parte, si llamamos $C := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ entonces $Q(x) = x^T C x$. El polinomio característico de $C$ es

$$p_C(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(1 - \lambda).$$

Por lo tanto, los autovalores de $C$ son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$. Sin embargo, como $C$ claramente NO es simétrica NO podemos aplicar el Teorema de Rayleigh. Para aplicar el Teorema de Rayleigh necesitamos escribir a $Q$ como $Q(x) = x^T Ax$ con $A$ simétrica. Si recordamos lo que hicimos la semana anterior, vimos que tomando

$$A := \frac{C + C^T}{2} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

entonces $Q(x) = x^T Ax$ y ahora $A$ es simétrica. Ahora sí podemos aplicar el Teorema de Rayleigh. El polinomio característico de $A$ es

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda) - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 3\lambda + \frac{7}{4}$$

y sus raíces son $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$. Por lo tanto, por el Teorema de Rayleigh,

$$\max_{\|x\|=1} Q(x) = \frac{3+\sqrt{2}}{2} \neq 2 = \max_{\|x\|=1} R(x)$$

y concluimos que la afirmación es FALSA. □

**Ejercicio de examen:** Sea $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ simétrica con autovalores $-2, -1, 1$. Hallar todos los $r \in \mathbb{R}$ tales que

$$-2 \leq x^T(B + rI)x \leq 16 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \|x\| = 2.$$

*Dem.* Sea $Q(x) := x^T Ax$ donde $A := B + rI$. Como $B$ es simétrica, $A$ también es simétrica. De hecho

$$A^T = (B + rI)^T = B^T + (rI)^T = B + rI = A.$$

Por otra parte, si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de $B$, entonces $Bv = \lambda v$, para cierto $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Entonces, como

$$Av = (B + rI)v = Bv + rv = \lambda v + rv = (\lambda + r)v,$$

tenemos que $\lambda + r$ es un autovalor de $A$ con el mismo autovector asociado.

Por lo tanto, los autovalores de $A$ (ordenados de mayor a menor) son: $\lambda_1 = 1 + r, \lambda_2 = -1 + r$ y $\lambda_3 = -2 + r$. Sean $\lambda_M = 1 + r$ y $\lambda_m = -2 + r$ el mayor y menor autovalor de $A$ respectivamente y sean $\mathcal{S}_{\lambda_M}$ y $\mathcal{S}_{\lambda_m}$ los autoespacios asociados correspondientes. Entonces, por el Teorema de Rayleigh,

$$\lambda_m \|x\|^2 \leq Q(x) \leq \lambda_M \|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^3$$

y $Q(x) = \lambda_m \|x\|^2$ si y sólo si $x \in \mathcal{S}_{\lambda_m}$ y $Q(x) = \lambda_M \|x\|^2$ si y sólo si $x \in \mathcal{S}_{\lambda_M}$. Entonces, es inmediato ver que

$$4\lambda_m \leq Q(x) \leq 4\lambda_M \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \|x\| = 2$$

y $Q(x) = 4\lambda_m$ si y sólo si $x \in \mathcal{S}_{\lambda_m}$ y $\|x\| = 2$ y $Q(x) = 4\lambda_M$ si y sólo si $x \in \mathcal{S}_{\lambda_M}$ y $\|x\| = 2$. Por lo tanto,

$$\min_{\|x\|=2} Q(x) = 4\lambda_m = 4(-2 + r) \quad \text{y} \quad \max_{\|x\|=2} Q(x) = 4\lambda_M = 4(1 + r).$$

Si

$$Q(x) = x^T Ax = x^T(B + rI)x \leq 16 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \|x\| = 2,$$

entonces 16 es una cota superior del conjunto $\{Q(x) : x \in \mathbb{R}^3 \text{ con } \|x\| = 2\}$. Entonces, el máximo de dicho conjunto es menor o igual a esa cota superior y por lo tanto,

$$\max_{\|x\|=2} Q(x) = 4\lambda_M = 4(1 + r) \leq 16$$

y entonces, tenemos que $r \leq \frac{16}{4} - 1 = 3$.

De la misma manera, si

$$-2 \leq x^T(B + rI)x = x^T Ax = Q(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \|x\| = 2,$$

entonces $-2$ es una cota inferior del conjunto $\{Q(x) : x \in \mathbb{R}^3 \text{ con } \|x\| = 2\}$. Entonces, el mínimo de dicho conjunto es mayor o igual a esa cota inferior y por lo tanto,

$$-2 \leq \min_{\|x\|=2} Q(x) = 4\lambda_m = 4(-2 + r)$$

y entonces, tenemos que $-\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \leq r$. Por lo tanto, $\frac{3}{2} \leq r \leq 3$. □

## Optimización de formas cuadráticas con restricciones definidas positivas

En lo que sigue, busacamos maximizar o minimizar una forma cudrática $Q(x) = x^T Ax$ donde $A$ es simétrica sujeta a la restricción $R(x) = 1$, donde $R(x) = x^T Bx$ es una forma cuadrática con $B$ simétrica y **definida positiva**.

Queremos resolver

$$\max_{R(x)=1} Q(x) \quad \text{y} \quad \max_{R(x)=1} Q(x).$$

Si $R(x) = x^T x = \|x\|^2$, entonces estamos en los casos que ya analizamos y que sabemos resolver usando el Teorema de Rayleigh. La idea entonces es, a partir de algún cambio de variables conveniente, trasformar la restricción $R(x) = 1$ en una restricción de la forma $z^T z = 1$ y luego usar lo que ya sabemos en las nuevas variables.

Para aplicar la idea anterior $B$ debe ser necesariamente **definida positiva**. De hecho, supongamos que existe una matriz inversible $F \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que con el cambio de variables $z = Fx$, transformamos la restricción $R(x) = 1$ en una restricción de la forma $z^T z = 1$. Entonces, por un lado $x = F^{-1}z$ y por el otro lado,

$$R(x) = x^T Bx = z^T (F^{-1})^T BF^{-1}z.$$

Si queremos que $z^T (F^{-1})^T BF^{-1}z = z^T z$ para todo $z \in \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$z^T ((F^{-1})^T BF^{-1} - I)z = z^T (F^{-1})^T BF^{-1}z - z^T z = 0 \text{ para todo } z \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, eso implica (meditar por qué) que

$$(F^{-1})^T BF^{-1} = I.$$

Si ahora multiplicamos la ecuación anterior a izquierda por $F^T$ y a derecha por $F$, recordando que $(F^{-1})^T = (F^T)^{-1}$, tenemos que

$$B = F^T[(F^{-1})^T B F^{-1}]F = F^T I F = F^T F.$$

Entonces, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\langle Bx, x \rangle = \langle F^T F x, x \rangle = \langle Fx, Fx \rangle = \|Fx\|^2 \geq 0,$$

y entonces $B$ tiene que ser semidefinida positiva. Y además, como queremos que $F$ sea inversible, tenemos que $nul(F) = \{0\}$. Entonces,

$$\langle Bx, x \rangle = 0 = \|Fx\|^2$$

si y sólo si $Fx = 0$ si y sólo si $x \in nul(F) = \{0\}$. Por lo tanto, $B$ tiene que ser necesariamente **definida positiva**. Si $B$ no cumple esa condición, no tendremos esperanzas de encontrar un cambio de variables que transforme la restricción $R(x) = 1$ en una restricción de la forma $z^T z = 1$.

Ahora sí, supongamos que $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es definida positiva. Entonces, $B$ es simétrica, sus autovalores son todos positivos y existe $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, tal que $B = QDQ^T$, donde $D = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix}$ es la matriz con todos los autovalores positivos de $B$.

Sea

$$F := Q \begin{bmatrix} \mu_1^{1/2} & \cdots & 0 \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & \cdots & \mu_n^{1/2} \end{bmatrix} Q^T.$$

Entonces, esa es una diagonalización ortogonal de $F$ por cómo la definimos. Es más, por definición, los autovalores de $F$ son la raíz cuadrada de los autovalores de $B$. Por lo tanto, $F$ es simétrica y tiene todos autovalores positivos (no nulos). Es decir, $F$ es inversible y definida positiva y además

$$F^2 = FF = FF^T = F^T F = Q \begin{bmatrix} \mu_1^{1/2} & \cdots & 0 \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & \cdots & \mu_n^{1/2} \end{bmatrix} Q^T Q \begin{bmatrix} \mu_1^{1/2} & \cdots & 0 \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & \cdots & \mu_n^{1/2} \end{bmatrix} Q^T = QDQ^T = B.$$

La matriz $F$ es un buen candidato para el cambio de variables que buscamos. Entonces, hagamos el cambio de variables $z = Fx$, $(x = F^{-1}z)$. Entonces, como $B = F^2 = F^T F = FF^T$, tenemos que

$$R(x) = x^T Bx = x^T F^T F x = (Fx)^T (Fx) = z^T z \;\text{ y}$$

$$Q(x) = x^T Ax = (F^{-1}z)^T A(F^{-1}z) = z^T (F^{-1})^T AF^{-1}z = z^T (F^{-1}AF^{-1})z.$$

Entonces, usando el Teorema de Rayleigh, tenemos que

$$\max_{R(x)=1} Q(x) = \max_{z^T z=1} z^T (F^{-1}AF^{-1})z = \lambda_M (F^{-1}AF^{-1}),$$

donde $\lambda_M(F^{-1}AF^{-1})$ es el autovalor máximo de la matriz simétrica $F^{-1}AF^{-1}$. Por el mismo teorema, tenemos que el máximo se alcanza en los $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_{\lambda_M(F^{-1}AF^{-1})}$ tales que $\|z\| = 1$.

De manera análoga, tenemos que

$$\min_{R(x)=1} Q(x) = \min_{z^T z=1} z^T(F^{-1}AF^{-1})z = \lambda_m(F^{-1}AF^{-1}),$$

donde $\lambda_m(F^{-1}AF^{-1})$ es el autovalor mínimo de la matriz simétrica $F^{-1}AF^{-1}$. Por el mismo teorema, tenemos que el mínimo se alcanza en los $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_{\lambda_m(F^{-1}AF^{-1})}$ tales que $\|z\| = 1$.

Para evitar hacer todas las cuentas que implicaría el cálculo de los autovalores y autoespacios de la matriz $F^{-1}AF^{-1}$, a continuación, veremos una manera simple de hallar $\lambda_M(F^{-1}AF^{-1})$, $\lambda_m(F^{-1}AF^{-1})$, $\mathcal{S}_{\lambda_M(F^{-1}AF^{-1})}$ y $\mathcal{S}_{\lambda_m(F^{-1}AF^{-1})}$.

Con la notación que usamos arriba, valen las siguientes observaciones:

1. $\lambda$ es un autovalor de $F^{-1}AF^{-1}$ si y sólo si $\lambda$ es una raíz de $\det(A - \lambda B)$.
2. Sea $\lambda$ un autovalor de $F^{-1}AF^{-1}$. Entonces $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_\lambda$ si y sólo si $x \in nul(A - \lambda B)$.

Probemos estas observaciones.

1. : Recordemos que $B = F^2$, entonces

$$F^{-1}BF^{-1} = F^{-1}FFF^{-1} = I.$$

Por lo tanto,

$$F^{-1}AF^{-1} - \lambda I = F^{-1}AF^{-1} - \lambda F^{-1}BF^{-1} = F^{-1}(A - \lambda B)F^{-1}.$$

Entonces, $\lambda$ es un autovalor de $F^{-1}AF^{-1}$ si y sólo si

$$0 = \det(F^{-1}AF^{-1} - \lambda I) = \det(F^{-1}(A - \lambda B)F^{-1}) = \det(F)\det(A - \lambda B)\det(F^{-1}) = \det(A - \lambda B)$$

si y sólo si $\lambda$ es una raíz de $\det(A - \lambda B)$.

2. : Sea $\lambda$ un autovalor de $F^{-1}AF^{-1}$ y supongamos que $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_\lambda$, entonces $F^{-1}AF^{-1}z = \lambda z$. Por lo tanto, $AF^{-1}z = F(F^{-1}AF^{-1})z = F\lambda z = \lambda Fz$ y

$$(A - \lambda B)x = (A - \lambda B)F^{-1}z = AF^{-1}z - \lambda BF^{-1}z = \lambda Fz - \lambda FFF^{-1} = \lambda Fz - \lambda Fz = 0,$$

entonces $x \in nul(A - \lambda B)$.

Recíprocamente, supongamos que $x \in nul(A - \lambda B)$ entonces $(A - \lambda I)x = 0$, ó equivalentemente, $Ax = \lambda Bx = \lambda FFx$. Entonces

$$F^{-1}Ax = \lambda F^{-1}FFx = \lambda Fx.$$

Sea $z := Fx$, entonces $x = F^{-1}z$ y

$$(F^{-1}AF^{-1})z = F^{-1}Ax = \lambda Fx = \lambda z.$$

Por lo tanto $\lambda$ es un autovalor de $F^{-1}AF^{-1}$, $z \in \mathcal{S}_\lambda$ y $x = F^{-1}z$.

Vamos a aplicar estas herramientas en el siguiente ejercicio:
**Ejercicio 11:** Sean $Q_1, Q_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ definidas por

$$Q_1(x) = x_1x_2, \quad Q_2(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2.$$

a) Hallar $\max\limits_{Q_2(x)=1} Q_1(x)$ y $\min\limits_{Q_2(x)=1} Q_1(x)$.

b) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que maximizan $Q_1$.

c) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que minimizan $Q_1$.

Observar que $Q_1(x) = x^T Ax$, con $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ y $Q_2(x) = x^T Bx$ con $B = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

El polinomio característico de $B$ es $p_B(\lambda) = (9-\lambda)(3-\lambda) - 16$, cuyas raíces son $\lambda_1 = 11$ y $\lambda_2 = 1$ (ambas positivas). Por lo tanto, $B$ es definida positiva, entonces la restricción $Q_2$ es una forma cuadrática definida positiva y podemos aplicar lo que acabamos de ver.

*Dem.* $a)$ : Vimos que si $B = FF$, con $F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida positiva, entonces

$$\max_{Q_2(x)=1} Q_1(x) = \lambda_M(F^{-1}AF^{-1}) \text{ y } \min_{Q_2(x)=1} Q_1(x) = \lambda_m(F^{-1}AF^{-1})$$

donde $\lambda_M(F^{-1}AF^{-1})$ y $\lambda_m(F^{-1}AF^{-1})$ son el máximo y mínimo autovalor de $F^{-1}AF^{-1}$ respectivamente. También vimos que $\lambda$ es una autovalor de $F^{-1}AF^{-1}$ si y sólo si $\lambda$ es una raíz de $\det(A-\lambda B)$. Busquemos entonces las raíces de

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda B) &= \det(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} -9\lambda & \frac{1}{2}+4\lambda \\ \frac{1}{2}+4\lambda & -3\lambda \end{bmatrix}) \\ &= 27\lambda^2 - (\frac{1}{2}+4\lambda)^2 = 27\lambda^2 - 16\lambda^2 - \frac{1}{4} - 4\lambda = 11\lambda^2 - 4\lambda - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Las ráices de $\det(A-\lambda B)$ son $\lambda_1 = \frac{4+3\sqrt{3}}{22} = \lambda_M(F^{-1}AF^{-1})$ y $\lambda_2 = \frac{4-3\sqrt{3}}{22} = \lambda_m(F^{-1}AF^{-1})$. Entonces,

$$\max_{Q_2(x)=1} Q_1(x) = \frac{4+3\sqrt{3}}{22} \text{ y } \min_{Q_2(x)=1} Q_1(x) = \frac{4-3\sqrt{3}}{22}.$$

$b)$ : Vimos que los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que maximizan $Q_1$ son los $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_{\lambda_M(F^{-1}AF^{-1})}$ tales que $\|z\| = 1$. También vimos que $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_{\lambda_M(F^{-1}AF^{-1})}$ si y sólo si $x \in nul(A - \lambda_M(F^{-1}AF^{-1})B)$. Calculemos

$$nul(A - \lambda_M(F^{-1}AF^{-1})B) = nul(A - (\frac{4+3\sqrt{3}}{22})B) = \begin{bmatrix} \frac{-36-27\sqrt{3}}{22} & \frac{27+12\sqrt{3}}{22} \\ \frac{27+12\sqrt{3}}{22} & \frac{-12-9\sqrt{3}}{22} \end{bmatrix} = gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}\}.$$

Entonces, el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que maximizan $Q_1$ son los $x$ de la forma $x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $Q_2(x) = 1$. Como

$$\begin{aligned} 1 = Q_2(x) = Q_2(\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}) = \alpha^2 Q_2(\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}) &= \alpha^2 (\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix})^T B \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \alpha^2 (\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix})^T \begin{bmatrix} 9 - 4\sqrt{3} \\ -4 + 3\sqrt{3} \end{bmatrix} = \alpha^2 (9 - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 9) \\ &= \alpha^2 (18 - 8\sqrt{3}), \end{aligned}$$

tenemos que $\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{(18-8\sqrt{3})}}$ y el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que maximizan $Q_1$, es el conjunto de dos puntos $\{\frac{1}{\sqrt{(18-8\sqrt{3})}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, -\frac{1}{\sqrt{(18-8\sqrt{3})}} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}\}$.

*c)* : Vimos que los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que minimizan $Q_1$ son los $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_{\lambda_m(F^{-1}AF^{-1})}$ tales que $\|z\| = 1$. También vimos que $x = F^{-1}z$ con $z \in \mathcal{S}_{\lambda_m(F^{-1}AF^{-1})}$ si y sólo si $x \in nul(A - \lambda_m(F^{-1}AF^{-1})B)$. Calculemos

$$nul(A - \lambda_m(F^{-1}AF^{-1})B) = nul(A - (\frac{4 - 3\sqrt{3}}{22})B) = \begin{bmatrix} \frac{-36+27\sqrt{3}}{22} & \frac{27-12\sqrt{3}}{22} \\ \frac{27-12\sqrt{3}}{22} & \frac{-12+9\sqrt{3}}{22} \end{bmatrix} = gen\{\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}\}.$$

Entonces, el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que minimizan $Q_1$ son los $x$ de la forma $x = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $Q_2(x) = 1$. Como

$$\begin{aligned} 1 = Q_2(x) = Q_2(\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}) = \alpha^2 Q_2(\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}) &= \alpha^2 (\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix})^T B \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \\ &= \alpha^2 (\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix})^T \begin{bmatrix} -9 - 4\sqrt{3} \\ 4 + 3\sqrt{3} \end{bmatrix} = \alpha^2 (9 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 9) \\ &= \alpha^2 (18 + 8\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{(18+8\sqrt{3})}}$ y el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $Q_2(x) = 1$ y que minimizan $Q_1$ es el conjunto de dos puntos $\{\frac{1}{\sqrt{(18+8\sqrt{3})}} \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}, -\frac{1}{\sqrt{(18+8\sqrt{3})}} \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}\}$. □

En el próximo ejercicio, vamos a resolver un problema de minimización con una restricción que no es definida positiva. Por lo tanto, no podremos aplicar las herramientas que vimos hasta ahora. Sin embargo, como la función a minimizar es $Q_1(x) = \|x\|^2$ (que veremos es una función relativamente sencilla) podremos resolver el ejercicio geométricamente.

**Ejercicio 12 b):** Hallar si existen, el máximo y el mínimo y (los puntos donde se alcanzan) de la forma cuadrática $Q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q_1(x) = \|x\|^2$, sujeto a la restricción

$$Q_2(x) = 2x_1^2 - 6x_2^2 + 6x_1x_2 = 1.$$

*Dem.* Observar que $Q_2(x) = x^T Bx$, con $B := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$. El polinomio característico de $B$ es

$$p_B(\lambda) = (2-\lambda)(-6-\lambda) - 6 = \lambda^2 + 4\lambda - 21.$$

Entonces, los autovalores de $B$ son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -7$. Por lo tanto $B$ es indefinida y NO podemos aplicar la técnica que usamos en el **Ejercicio 11**.

Sin embargo, como la forma cuadrática a optimizar es $Q_1(x) = \|x\|^2$ no todo está perdido. Imaginemos que graficamos en $\mathbb{R}^2$ la restricción $Q_2(x) = 1$ que es el gráfico del conjunto de nivel $c = 1$ para la forma cuadrática indefinida $Q_2$ (lo aprendimos a hacer al principio de la semana pasada). Si podemos observar cuáles puntos de dicho gráfico se encuentran más cercanos al origen es decir al punto $[0\ 0]^T \in \mathbb{R}^2$, entonces es claro que esos puntos van a minimizar la función $\|x\|$, luego (si no se entiende la próxima igualdad demostrarla) tenemos que

$$(\min_{Q_2(x)=1} \|x\|)^2 = \min_{Q_2(x)=1} \|x\|^2 = \min_{Q_2(x)=1} Q_1(x).$$

Lo mismo podremos pensar para los puntos más alejados del origen y el máximo que nos interesa.

Entonces, para graficar el conjunto de nivel $Q_2(x) = 1$, diagonalizemos ortogonalmente a la matriz $B$. Ya vimos que $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -7$ son sus autovalores y los autoespacios asociados son:

$$nul(B - 3I) = nul(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\},$$

$$nul(B + 7I) = nul(\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}) = gen\{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\}.$$

Entonces, $\{\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\}$ es una bon de $\mathbb{R}^2$ y si tomamos $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$, entonces $\det(P) = 1$ y una diagonalización ortogonal de $B$ es

$$B = P \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} P^T.$$

Por lo tanto, con el cambio de variables $x = Py$, nos queda $Q(x) = \tilde{Q}(y) = 3y_1^2 - 7y_2^2$. Entonces $Q_2(x) = 1$ si y sólo $3y_1^2 - 7y_2^2 = 1$, ó equivalentemente,

$$\frac{y_1^2}{[\frac{1}{\sqrt{3}}]^2} - \frac{y_2^2}{[\frac{1}{\sqrt{7}}]^2} = 1.$$

Por lo tanto el conjunto de nivel $Q_2(x) = 1$ es una hipérbola en $\mathbb{R}^2$ en los nuevos ejes $y_1, y_2$ determinados por los versores $v_1 := \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 := \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ que son las columnas de $P$ y que son una rotación de un ángulo (positivo) de los ejes originales $x_1, x_2$. Ver Figura 1.

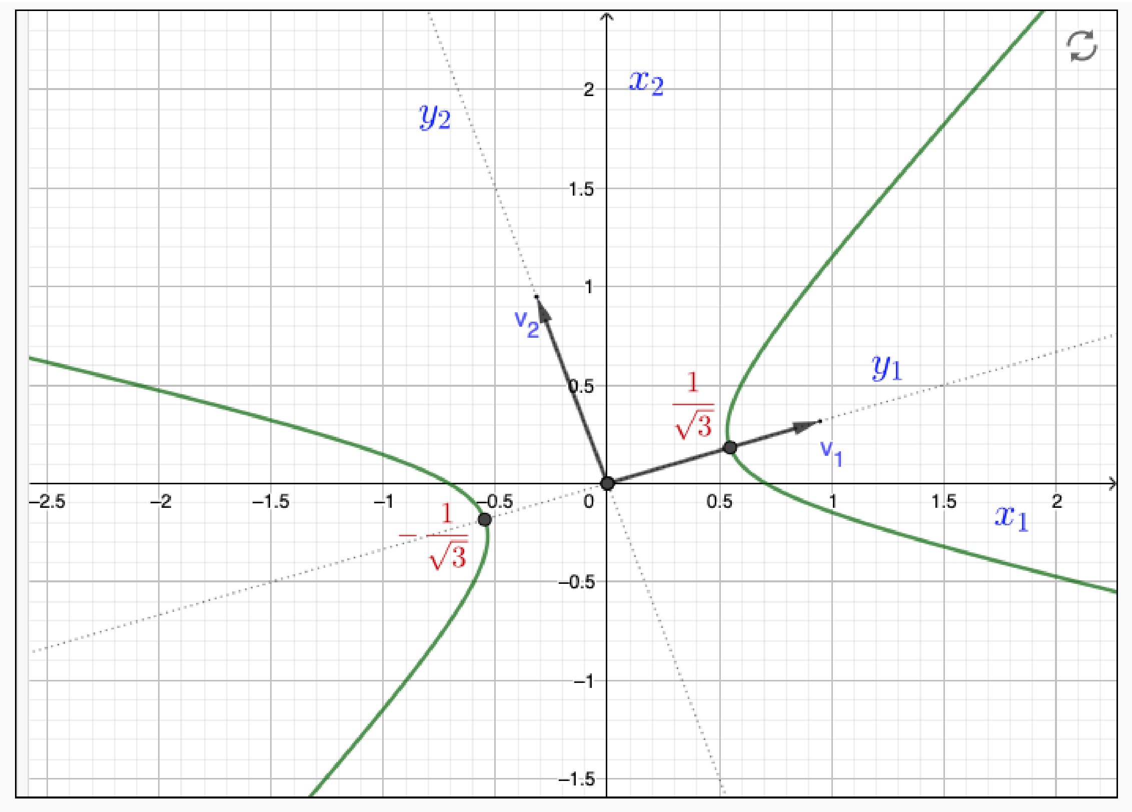


Figura 1: Ejercicio 12b))

Como se puede observar, los puntos del conjunto de nivel $Q_2(x) = 1$ (que son los puntos de la hipérbola de color verde) más cercanos al origen, son los puntos $y_{m1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix}$ e $y_{m2} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix}$ (en los ejes $y_1, y_2$). Por lo tanto, usando el cambio de variables $x = Py$, tenemos que, los puntos más cercanos al origen son

$$x_{m1} = Py_{m1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \text{ y } x_{m2} = Py_{m2} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{30}} \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\min_{Q_2(x)=1} Q_1(x) = \min_{Q_2(x)=1} \|x\|^2 = (\min_{Q_2(x)=1} \|x\|)^2 = \|x_m\|^2 = \|y_m\|^2 = (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = \frac{1}{3}$$

y dicho mínimo, como acabamos de ver, se alcanza en los puntos $x_{m1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$ y $x_{m2} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{\sqrt{30}} \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}$.

Por último, es claro que no existe el máximo de $\|x\|^2$ restringido a $Q_2(x) = 1$. $\square$

Tal como hicimos en el **Ejercicio 12**, podemos determinar gráficamente (si existen) $\min\limits_{Q_2(x)=1} Q_1(x)$ y $\max\limits_{Q_2(x)=1} Q_1(x)$ y los puntos donde se alcanzan esos extremos, para cualquier forma cuadrática $Q_2$ (sin importar si es definida positiva) pero cuando $Q_1$ es una forma cuadrática muy particular, por ejemplo $Q_1(x) = \|x\|^2$ o formas cuadráticas similares.